2.2. Метод інтервалів розв'язування нерівностей.

Найбільш ефективним методом розв'язування нерівностей, заданих у вигляді добутку деяких функцій, є *метод інтервалів*. Метод інтервалів розв'язування нерівностей грунтується на такій фундаментальній властивості монотонних функцій: будь-яка монотонна функція або зберігає свій знак на області визначення, або змінює його точно один раз у своєму нулі (тобто графік функції або не перетинає вісь абсцис, або перетинає її точно один раз).

Перед тим як переходити до самого методу інтервалів, поговоримо про характер монотонності суперпозиції функцій. Нехай $y = f(g(x))$ - суперпозиція функцій. Тоді, якщо існує суперпозиція функцій $y = f(g(x))$, маємо:

1. ***Якщо функції f (x) і g (x) є зростаючими, то й y = f (g (x)) буде зростаючою;***
2. ***Якщо функція f (x) є зростаючою, а функція g (x) - спадною, то y = f (g (x)) буде спадною;***
3. ***Якщо функція f (x) є спадною, а функція g (x) - зростаючою, то y = f (g (x)) буде спадною;***
4. ***Якщо функції f (x) і g (x) є спадними, то y = f (g (x)) буде зростаючою.***

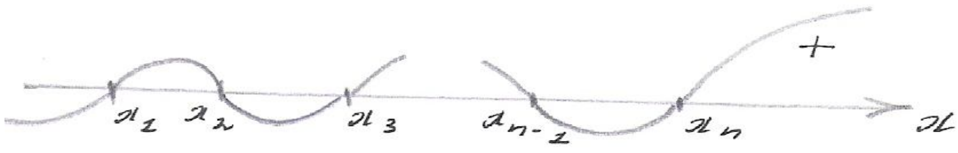
З цих тверджень можна зробити висновок, що при співпадаючому характері монотонності функцій їх суперпозиція монотонно зростає, а при не співпадаючому характері монотонності - їх суперпозиція монотонно спадає.

Нехай нам задана нерівність:

$$f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x) \geq 0 \qquad (f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x) \leq 0\,)$$

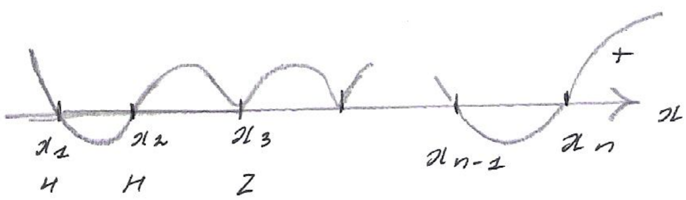
Нехай усі функції $f_i(x)$ всюди визначені, монотонні і кожна з них має свій «нуль» x_i. Нехай ще все $x_i, i = \overline{1,n}$ для різних індексів i різні.

Тоді визначаємо знак добутку на $+\infty$. Для визначення знака виразу на $+\infty$ ми використаємо монотонність $f_i(x)$. Графік функції $f_i(x)$ перетинає вісь абсцис точно один раз (в силу монотонності $f_i(x)$), тобто має один знак на інтервалі $(-\infty, x_i)$ і протилежний знак на інтервалі $(x_i, +\infty)$. Тому в*сі* такі функції на $+\infty$ додатні, якщо вони монотонно зростаючі, і від'ємні, якщо вони монотонно спадні (у разі коли монотонна функція не має нуля, вона зберігає свій знак на всій області визначення). Завдяки цьому ми можемо визначати знак добутку монотонних функцій на $+\infty$. Зауважимо, що знак усього добутку на $+\infty$ можна підрахувати й інакше. Досить обчислити значення всіх функцій $f_i(x)$ в деякій точці, що лежить правіше останнього з нулів функцій $f_i(x)$ і визначити знак всього добутку в цій точці. Цей знак і буде знаком всього добутку на $+\infty$. Проте, другий метод підрахунку знака виразу на $+\infty$ менш ефективний, тому що, на відміну від першого, вимагає додаткових обчислень. Після цього ми будуємо «змійку сталості знаку» (зміни знаків) початкового добутку, рухаючись по осі справа наліво та враховуючи, що вихідний добуток буде змінювати свій знак у кожному з нулів функцій $f_i(x)$(оскільки в такому нулі тільки один із множників початкового добутку, тобто тільки одна з функцій $f_i(x)$, буде змінювати свій знак). Графічно це означає, що «змійка» буде перетинати вісь у кожному з нулів функцій $f_i(x)$. Зауважимо, що такий метод побудови «змійки» виправданий тільки в тому випадку, коли серед нулів функцій $f_i(x)$ немає однакових (всі нулі різні).



Розглянемо тепер техніку побудови «змійки» у разі, коли нулі функцій $f_i(x)$ можуть співпадати. Нехай деяке число x_0 служить нулем k функцій $f_i(x)$. У цьому випадку будемо говорити, що нуль x_0 має кратність k.

Якщо нуль має парну кратність, (тобто є нулем парної кількості монотонних функцій, що входять у нерівність), то при проходженні через нього знак добутку не змінюється (тобто «змійка» торкається осі абсцис і залишається у вихідній напівплощині). Якщо ж нуль має непарну кратність, (тобто є нулем непарної кількості монотонних функцій, що входять у нерівність), то при проходженні через нього знак добутку змінюється на протилежний (тобто «змійка» перетинає вісь абсцис і переходить в іншу напівплощину). Тому, в цьому випадку, наша «змійка» буде мати вигляд:



Приклад 2.2.1. Розв'язати нерівність:

$$(x+2)(x^2-x)(3x+1)(7-4x)<0\,.$$

Розв'язання. Скористаємося вище викладеним методом інтервалів. Зведемо нерівність до виду (*):

$$(x+2)\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+\frac{1}{3})\cdot(7-4x)<0\,(*)$$

Функції $y = x+2$, $y = x$, $y = x-1$, $y = x+1/3$ є зростаючими, а функція $y = 7-4x$ є спадною. Перші три функції приймають додатні значення на $+\infty$, а остання функція набуває від'ємних значень на $+\infty$. Тому загальним знаком добутку на $+\infty$ буде мінус. Відкладемо нулі функцій $-2; 0; 1; -\frac{1}{3}; \frac{7}{4}$ на числовій осі. Всі нулі функцій є нулями непарної кратності, тому одержуємо «змійку сталості знаку»:

Розв'язками вихідної нерівності будуть такі проміжки, на яких вираз приймає від'ємні значення («змійка» знаходиться нижче осі абсцис). Граничні точки інтервалів не включаються у відповідь, адже вихідна нерівність є строгою.

Відповідь: $x \in (-2;-\frac{1}{3}) \cup (0;1) \cup (\frac{7}{4};+\infty)$.

Хотілося б зауважити, що метод інтервалів можна застосовувати і для нестрогих нерівностей. Відмінність буде в тому, що нулі функцій для даної нерівності будуть входити в множину розв'язків вихідної нерівності.

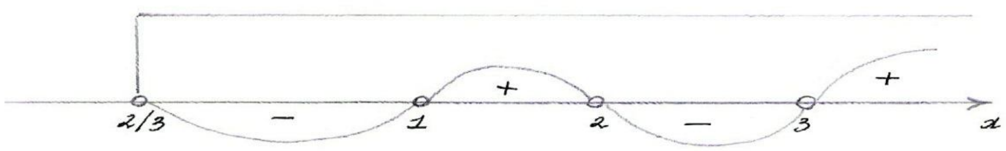
Приклад 2.2.2. Розв'язати нерівність***:***

$$(3x-1)(\log_2(3x-2))(x^2-5x+6)\sqrt[3]{x+1} < 0.$$

Розв'язання. Зведемо нерівність до виду

$$(3x-1)(\log_2(3x-2))(x-2)(x-3)\sqrt[3]{x+1} < 0.$$

Зазначимо, що всі функції добутку є зростаючими на області визначення нерівності. Всі функції приймають додатні значення на $+\infty$. Тому загальним знаком виразу на $+\infty$ буде плюс. Але для логарифмічної функції в силу того, що її область визначення - це $\mathbb{R}^+$, є обмеження $3x-2>0 \Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$. Нулями функцій будуть числа: -1; 1/3;1;2;3. Відкладемо числа 1; 2; 3 на числовій осі, числа -1 та 1 / 3 ми не відкладаємо, так як вони знаходяться поза областю визначення вихідної нерівності. Маємо:



Відповідь: $x \in (\frac{2}{3};1) \cup (2;3)$.

Варто відзначити, що метод інтервалів також можна застосовувати при розв'язуванні *нерівностей, в яких є дроби*. Щоб застосувати метод інтервалів для таких нерівностей їх зазвичай зводять до стандартного виду:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \text{ або } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \text{ (у випадку строгої нерівності)},$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ або } \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \text{ (у випадку нестрогої нерівності)},$$

де $P(x), Q(x)$ - деякі функції від однієї змінної. Зауважимо, що (див.2.4)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x)Q(x)>0,$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x)Q(x) < 0$$

і

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(x)Q(x) \geq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases},$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(x)Q(x) \leq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

Таким чином, нерівності з дробами зводяться до нерівностей, які задані за допомогою добутку, а до останніх може бути застосований метод інтервалів, якщо функції $P(x), Q(x)$ розкладаються в добуток монотонних множників..

З огляду на сказане вище, метод інтервалів можна відразу застосовувати до нерівностей з дробами в яких чисельник і знаменник розкладені на монотонні множники. Для цього знаходять всі нулі функцій, які знаходяться у чисельнику та знаменнику дробу. Далі ці числа відкладають на числовій осі. Щоб визначити знак нерівності на $+\infty$ користуються монотонністю функцій чисельника і знаменника. У випадку строгої нерівності нулі функцій чисельника і знаменника не входять в множину рішень нерівності; у разі нестрогої нерівності нулі функцій чисельника входять в множину рішень нерівності, якщо тільки вони не є нулями знаменника.

<u>Приклад 2.2.3.</u> Розв'язати нерівність:

$$\frac{(x+3)(x^2-3x\ )}{(x-4)} \geq 0.$$

<u>Розв'язання.</u> Зведемо нерівність до виду:

$$\frac{(x+3)x(x-3)}{(x-4)} \geq 0.$$

Всі функції чисельника і знаменника є функціями зростаючими. Отже, знаком всього виразу (дробу) на $+\infty$ буде плюс. Нулями функцій чисельника і знаменника є -3; 0; 3; 4. Відкладемо ці числа на числовій осі, при цьому врахуємо, що 4 не входить в множину рішень нерівності (зображується незаштрихованим кружечком на осі):

<u>Відповідь:</u> $x \in (-\infty; -3] \cup [0; 3] \cup (4; +\infty).$